

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΖΗΤΗΜΑ 1^ο

Α.

α. Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

β. Πρέπει να ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

Β.

Θέλουμε να αποδείξουμε $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Επειδή $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Ισχύει $P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A - B) + P(A \cap B)$

Όμως $P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A)$ συνεπώς θα έχουμε

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Γ.

α. ΛΑΘΟΣ

(γιατί οι λογαριθμικές και πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις)

β. ΛΑΘΟΣ

$$\begin{aligned} \text{γιατί } (\cos x + \ln x^2 + \sqrt{x})' &= -\sin x + \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\sin x + \frac{2}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

γ. ΣΩΣΤΟ

δ. ΛΑΘΟΣ

(γιατί οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i εκφράζουν

το ποσοστό των παρατηρήσεων και όχι το πλήθος

των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i

ε. ΣΩΣΤΟ

ζ. ΣΩΣΤΟ

(γιατί θέλουμε να βρούμε την $P[(A - B) \cup (B - A)]$)

Έχουμε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0,4 = 0,3 + 0,2 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1$$

Αρα $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) =$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,3 + 0,2 - 2 \cdot 0,1 = 0,3$$

ΖΗΤΗΜΑ 2°

$$g(x) = \frac{x-2}{x^2-3} = \frac{x-2}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$$

α. είναι το γ δηλαδή πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

γιατί $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \neq 0 \Rightarrow x + \sqrt{3} \neq 0$ και $x - \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \neq -\sqrt{3}$ και $x \neq \sqrt{3}$

β. ο ρυθμός μεταβολής είναι το $g'(3)$

$$\begin{aligned} \text{έχουμε } g'(x) &= \frac{(x-2)'(x^2-3) - (x-2)(x^2-3)'}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2-3 - (x-2)2x}{(x^2-3)^2} = \\ &= \frac{-x^2+4x-3}{(x^2-3)^2} \text{ αρα } g'(3) = \frac{-3^2+4 \cdot 3-3}{(3^2-3)^2} = \frac{0}{36} = 0 \end{aligned}$$

γ. το $g'(x) = \frac{-x^2+4x-3}{(x^2-3)^2} = \frac{-x^2+4x-3}{x^4-6x^2+9}$

$$\begin{aligned} \text{αρα } \lim_{x \rightarrow 2} [(x^4 - 6x^2 + 9) \cdot g'(x)] &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[(x^4 - 6x^2 + 9) \cdot \frac{-x^2+4x-3}{x^4-6x^2+9} \right] = \\ \lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 4x - 3) &= -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -4 + 8 - 3 = 1 \end{aligned}$$

δ.

Η εφαπτομένη στην καμπύλη της $g(x)$

θα έχει τυπο $y = \alpha x + \beta$ (1) με $\alpha = g'(x_0)$

$$\text{και } g(x_0) = 0,5 \Rightarrow \frac{x_0-2}{x_0^2-3} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$

$$\text{αρα } \alpha = g'(1) \Rightarrow \alpha = \frac{-1^2+4 \cdot 1-3}{(1^2-3)^2} \Rightarrow \alpha = 0$$

αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε

$$g(x_0) = 0 \cdot x_0 + \beta \Rightarrow g(1) = 0 \cdot 1 + \beta \Rightarrow 0,5 = \beta$$

Αρα $\beta = 0,5$ οπότε η εφαπτομένη είναι η $y = 0,5$

ΖΗΤΗΜΑ 3°

Εχουμε $P(A \cup \Gamma) = \frac{N(A \cup \Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{400}{400} = 1$, $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{340}{400} = 0,85$

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{240}{400} = 0,6$$

Επίσης $P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma)$

$$\Leftrightarrow 1 = 0,85 + 0,6 - P(A \cap \Gamma) \Leftrightarrow P(A \cap \Gamma) = 0,45$$

$$P(A - \Gamma) = P(A) - P(A \cap \Gamma) = 0,85 - 0,45 \Leftrightarrow P(A - \Gamma) = 0,4$$

α. Τα A και Γ δεν είναι ασυμβίβαστα γιατί αν ήταν ασυμβίβαστα θα ίσχυε $P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma)$ όμως $1 \neq 0,85 + 0,6 \Leftrightarrow 1 \neq 1,45$

β. $A - \Gamma \subseteq A \Rightarrow P(A - \Gamma) \leq P(A) \Rightarrow P(A - \Gamma) \leq 0,85 = \frac{17}{20}$

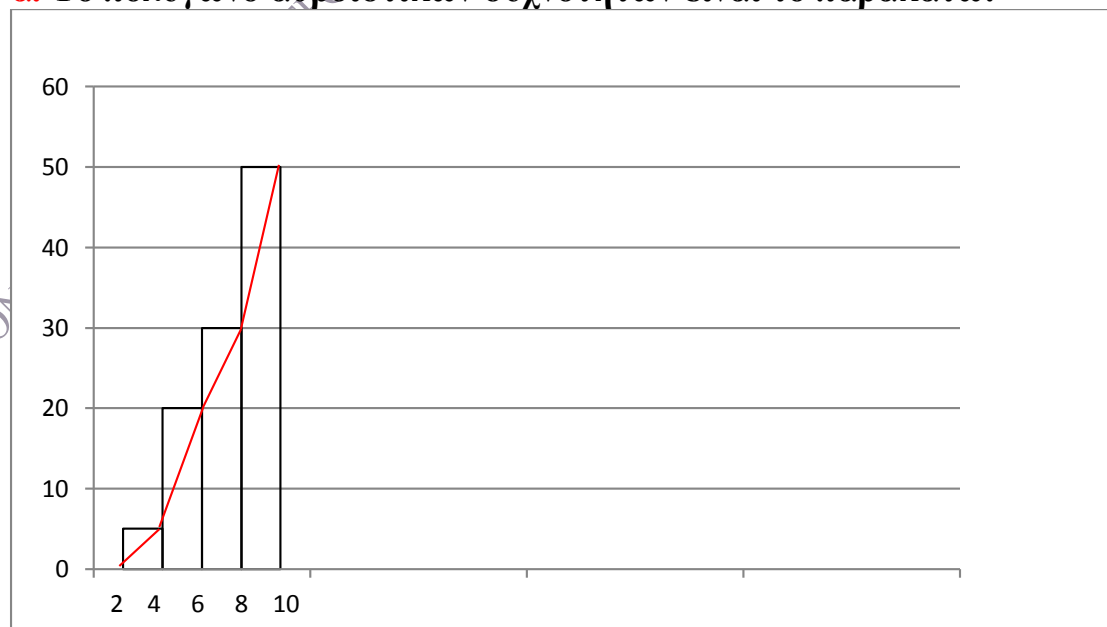
γ. $P(\Gamma - A) = P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) \Leftrightarrow P(\Gamma - A) = 0,6 - 0,45 \Leftrightarrow P(\Gamma - A) = 0,15$

δ. $P[(A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)] = \begin{cases} 1ος \text{ τροπος } P(A - \Gamma) + P(\Gamma - A) = 0,4 + 0,15 = 0,55 \\ 2ος \text{ τροπος } P(A \cup \Gamma) - P(A \cap \Gamma) = 1 - 0,45 = 0,55 \end{cases}$

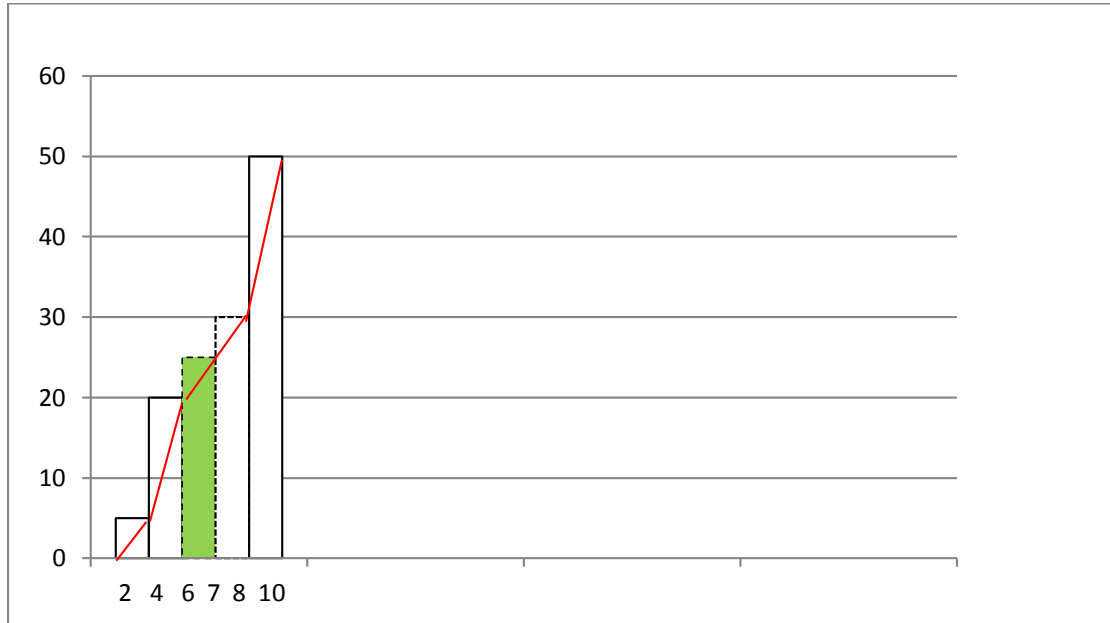
ΖΗΤΗΜΑ 4°

ΧΡΟΝΙΑ ΥΠΗΡΕΣΙΑΣ κλάσεις	x_i	ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟΙ v_i	N_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
2-4	3	5	5	15	45
4-6	5	15	20	75	375
6-8	7	10	30	70	490
8-10	9	20	50	180	1620
ΣΥΝΟΛΟ		50		340	2530

α. Το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων είναι το παρακάτω:



β. Η **Διάμεσος** είναι $\delta=7$ όπως φαίνεται από το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων γιατί στον κάθετο άξονα το 25 είναι το μισό μεταξύ του 20-30 και μεταξύ 0-50 άρα το μισό μεταξύ 6-8 στον οριζόντιο άξονα είναι η διάμεσος **$\delta=7$**



$$\gamma. \bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{340}{50} = 6,8$$

$$s^2 = \frac{1}{v} \cdot \left[\sum_{i=1}^4 x_i^2 v_i - \frac{(\sum_{i=1}^4 x_i v_i)^2}{v} \right] = \frac{1}{50} \cdot \left[2530 - \frac{340^2}{50} \right] = \frac{1}{50} \cdot [2530 - 2312] = \frac{218}{50} = 4,36$$

$$\text{Άρα } s = \sqrt{4,36}$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΓΙΩΡΓΟΣ ΛΕΡΕΚΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ