Φροντιστηριακό Κέντρο Ιωαννίνων
ΣΚΑΛΙΣΤΗ - ΔΕΡΕΚΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΖΗΤΗΜΑ 1°

α.

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$$

β. α5 , β3 , γ2 , δ6

γ. Αφού έχει παράγοντα το $x+1$ τότε το $P(-1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (-1)^{2010}+(-1)^{2011}+\mu(-1)^{2012}+1=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1+(-1)+\mu+1=0 \Leftrightarrow \mu=-1$
Αρα το Δ

δ.
Εστω $\log_\alpha\theta_1=x_1$ και $\log_\alpha\theta_2=x_2$ και έχουμε

$\log_\alpha\theta_1=x_1 \Leftrightarrow \alpha^{x_1}=\theta_1$ (1)
$\log_\alpha\theta_2=x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_2}=\theta_2$ (2)

Διαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2)

$$\frac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}}=\frac{\theta_1}{\theta_2} \Leftrightarrow \alpha^{x_1-x_2}=\frac{\theta_1}{\theta_2} \Leftrightarrow x_1-x_2=\log_\alpha\frac{\theta_1}{\theta_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_\alpha\theta_1-\log_\alpha\theta_2=\log_\alpha\frac{\theta_1}{\theta_2}$$

ΖΗΤΗΜΑ 2°

α. Το πολυώνυμο γίνεται $P(x) = 2x^3 + \mu x^2 - 13x + \lambda$

αφού διαιρείται με $(x+2)(x-3)$ θα ισχύει

$$\begin{cases} P(-2)=0 \\ P(3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-2)^3 + \mu(-2)^2 - 13(-2) + \lambda = 0 \\ 2\cdot 3^3 + \mu\cdot 3^2 - 13\cdot 3 + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -16 + 4\mu + 26 + \lambda = 0 \\ 54 + 9\mu - 39 + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\mu + \lambda = -10 \\ 9\mu + \lambda = -15 \end{cases} \Rightarrow$$

πολ/ζω την 2^{η} με -1 $\Rightarrow \begin{cases} 4\mu + \lambda = -10 \\ -9\mu - \lambda = 15 \end{cases} \Rightarrow$ *προσθέτω κατά μέλη*

$\Rightarrow -5\mu = 5 \Rightarrow \mu = -1$ και με αντικατάσταση στην 1^{η}

$4(-1)+\lambda = -10 \Rightarrow -4 + \lambda = -10 \Rightarrow \lambda = -6$

β. Για τις τιμές $\mu = -1$ και $\lambda = -6$ έχουμε

$P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

Επειδή διαιρείται με $(x+2)(x-3)$ θα έχουμε

Με το σχήμα Horner για ρ=−2

2	−1	−13	−6	ρ=−2
	−4	10	6	
2	−5	−3	0	

Αρα $P(x) = (x+2)\,(2x^2 - 5x - 3)$

και όμοια με το σχήμα Horner για ρ=3

για το $2x^2 - 5x - 3$ θα έχουμε

2	−5	−3	ρ=3
	6	3	
2	1	0	

άρα $P(x) = (x+2)(x-3)(2x+1)$

για $P(x) = 0 \Rightarrow x = -2$ ή $x = 3$ ή $x = -\frac{1}{2}$

ΖΗΤΗΜΑ 3°

$(\Sigma_1)\begin{cases}(\mu+2)x=1-\lambda y\\ 3y=4-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\mu+2)x+\lambda y=1\\ x+3y=4\end{cases} \Rightarrow$

$(\Sigma_2)\begin{cases}(\mu+3)x=3+(\lambda+1)y\\ 2x=7+4y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\mu+3)x-(\lambda+1)y=3\\ 2x-4y=7\end{cases}$

για να είναι τα συστήματα συγχρόνως αδύνατα.
Πρέπει για τα (Σ_1), (Σ_2) (D=0 ,$D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$)

(Σ_1) D=$\begin{vmatrix}\mu+2 & \lambda\\ 1 & 3\end{vmatrix}$=$3(\mu+2)-\lambda=0 \Leftrightarrow 3(\mu+2)=\lambda$

(Σ_2) D=$\begin{vmatrix}\mu+3 & -(\lambda+1)\\ 2 & -4\end{vmatrix}$=$-4(\mu+3)+2(\lambda+1)=0$

$\Leftrightarrow -4\mu-12+2\lambda+2=0 \Leftrightarrow -4\mu+2\lambda-10=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\mu-2\lambda+10=0 \Leftrightarrow 2\mu-\lambda+5=0$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases}3(\mu+2)=\lambda\\ 2\mu-\lambda+5=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$2\mu-\lambda+5=0 \Leftrightarrow 2\mu-3(\mu+2)+5=0 \Leftrightarrow \mu=-1$
και $\lambda=3(-1+2) \Leftrightarrow \lambda=3$ **για τις τιμές αυτές έχουμε**

για το (Σ_1) D_x=$\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ 4 & 3\end{vmatrix}$=$3-4\lambda=-9\neq 0$ **και**

D_y=$\begin{vmatrix}\mu+2 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}$=$4\mu+7=3\neq 0$

για το (Σ_2) D_x=$\begin{vmatrix}3 & -(\lambda+1)\\ 7 & -4\end{vmatrix}$=$7\lambda-5=16\neq 0$

και D_y=$\begin{vmatrix}\mu+3 & 3\\ 2 & 7\end{vmatrix}$=$7\mu+15=8\neq 0$

άρα για $\lambda=3$ και $\mu=-1$
τα συστήματα είναι συγχρόνως αδύνατα

ΖΗΤΗΜΑ 4°

α.

Επειδή στους λογαρίθμους ισχύει η ισοδυναμία

$\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

θα έχουμε $x^{\log y} = y^{\log x} \Leftrightarrow \log x^{\log y} = \log y^{\log x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log y \log x = \log x \log y$ **που ισχύει**

άρα θα ισχύει και η $x^{\log y} = y^{\log x}$

β. Θα έχουμε χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής βάσης

$$\log_\alpha \beta = \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma \alpha \Leftrightarrow \log_\alpha \beta = \frac{\log_\alpha \gamma}{\log_\alpha \beta} \cdot \frac{\log_\alpha \alpha}{\log_\alpha \gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_\alpha \beta = \frac{1}{\log_\alpha \beta} \Leftrightarrow (\log_\alpha \beta)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_\alpha \beta = \mp\sqrt{1} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_\alpha \beta = 1 \\ \log_\alpha \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_\alpha \beta = \log_\alpha \alpha \\ \log_\alpha \beta = -\log_\alpha \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha \\ \log_\alpha \beta = \log_\alpha \alpha^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha \\ \beta = \alpha^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha \\ \beta = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

γ.

$$\frac{1}{3}\log 8 + \frac{1}{5}\log 32 + \frac{1}{2}\log 25 = \frac{1}{3}\log 2^3 + \frac{1}{5}\log 2^5 + \frac{1}{2}\log 5^2 =$$

$$= \frac{3}{3}\log 2 + \frac{5}{5}\log 2 + \frac{2}{2}\log 5 = 2\log 2 + \log 5 =$$

$$= \log 2^2 + \log 5 = \log 4 + \log 5 = \log 4 \cdot 5 = \log 20$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΕΡΕΚΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ