ΣΚΑΛΙΣΤΗ - ΔΕΡΕΚΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΖΗΤΗΜΑ 1°

α. Σε μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = \rho \tan \omega x$
με ρ,ω>0 η περίοδος της είναι **Τ=$\frac{\pi}{\omega}$**

β. Θέλουμε να δείξουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με $x-\rho$ είναι υ= $P(\rho)$

θα έχουμε $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon(x)$
επειδή ο διαιρέτης $x-\rho$ είναι $1^{ου}$ βαθμού
το $\upsilon(x)$ θα είναι $0^{ου}$ βαθμού δηλαδή σταθερό πολυώνυμο υ
και θα έχουμε $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon$ στην σχέση αυτή
για $x=\rho$ έχουμε $P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)+\upsilon=0+\upsilon=\upsilon$
άρα **υ= $P(\rho)$**

γ. Μια συνάρτηση f(x) με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν **$f(x) \leq f(x_0)$** $\forall x \in A$

δ. Στην λογαριθμική συνάρτηση $P(x)=\log_\alpha x$ με $0<\alpha<1$
μας ζητάνε ποια είναι το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών της και το είδος της μονοτονίας της .

το **πεδίο ορισμού** είναι το διάστημα **$(0,+\infty)$**
το **σύνολο τιμών** της όλο το **R**
και το είδος της μονοτονίας της **γνησίως φθίνουσα**

ε. έστω η συνάρτηση f(x)= $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ αν $\alpha>0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}]$ (ΣΩΣΤΟ; Ή ΛΑΘΟΣ;)

είναι **ΣΩΣΤΟ**

ΖΗΤΗΜΑ 2°

Για να λυθεί η εξίσωση

$$\sqrt{10-x}=\sqrt{3+\sqrt{2x-6}}$$

Πρέπει

$10-x\geq 0 \Leftrightarrow -x\geq -10 \Leftrightarrow x\leq 10$ **(1)**

$2x-6\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 6 \Leftrightarrow x\geq 3$ **(2)**

$3+\sqrt{2x-6}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-6}\geq -3$ **ισχύει** $\forall x\in R$ **(3)**

Από (1), (2), (3) $x\in[3,10]$

επειδή $\sqrt{10-x}$ **και** $\sqrt{3+\sqrt{2x-6}}$ **θετικοί**
μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο

θα έχουμε $\sqrt{10-x}=\sqrt{3+\sqrt{2x-6}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{10-x}\right)^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{2x-6}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10-x=3+\sqrt{2x-6} \Leftrightarrow 7-x=\sqrt{2x-6} \Leftrightarrow$$

επειδή $\sqrt{2x-6}$ **είναι θετικός άρα και ο ίσος του** $7-x$ **επίσης θετικός**
άρα μπορούμε και πάλι να υψώσουμε στο τετράγωνο

$$\Leftrightarrow (7-x)^2=\left(\sqrt{2x-6}\right)^2 \Leftrightarrow 49-14x+x^2=2x-6 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2-16x+55=0$ **η Δ=36**

και οι δύο ρίζες είναι $x_1=5$ **και** $x_2=11$ **απορρίπτεται**

επειδή $x\in[3,10]$ **δεκτή η** $x_1=5$

και με επαλήθευση για $x=5$ **στην αρχική εξίσωση**

έχουμε $\sqrt{10-5}=\sqrt{3+\sqrt{2\cdot 5-6}} \Leftrightarrow \sqrt{5}=\sqrt{5}$

αρα $x=5$ **δεκτή**

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Για το σύστημα $\begin{cases}\lambda y-3y-\lambda+2\lambda x=-1\\ \lambda^2+(\lambda-3)x+2\lambda y=\lambda\end{cases}$

θέλουμε τις τιμές του λ για να είναι **αδύνατο** και **αόριστο**

κανουμε τις πράξεις και το σύστημα γίνεται

$\begin{cases}2\lambda x+(\lambda-3)y=\lambda-1\\ (\lambda-3)x+2\lambda y=\lambda-\lambda^2\end{cases}$ οπότε έχουμε

$D=\begin{vmatrix}2\lambda & \lambda-3\\ \lambda-3 & 2\lambda\end{vmatrix}=4\lambda^2-(\lambda-3)^2=3(\lambda-1)(\lambda+3)$

$D_x=\begin{vmatrix}\lambda-1 & \lambda-3\\ \lambda-\lambda^2 & 2\lambda\end{vmatrix}=2\lambda(\lambda-1)-(\lambda-3)(\lambda-\lambda^2)=\lambda(\lambda-1)^2$

$D_y=\begin{vmatrix}2\lambda & \lambda-1\\ \lambda-3 & \lambda-\lambda^2\end{vmatrix}=2\lambda(\lambda-\lambda^2)-(\lambda-1)(\lambda-3)=-(\lambda-1)^2(2\lambda+3)$

α. αν $D\neq 0 \Rightarrow 3(\lambda-1)(\lambda+3)\neq 0 \Rightarrow \lambda\neq 1$ *και* $\lambda\neq -3$ τότε

το σύστημα έχει μοναδική λύση $\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{\lambda(\lambda-1)}{3(\lambda+3)}\\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-(\lambda-1)(2\lambda+3)}{3(\lambda+3)}\end{cases}$

β. αν $\lambda=1 \Rightarrow D=0$, $D_x=0$, $D_y=0$ το σύστημα είναι **αόριστο**

γ. αν $\lambda=-3 \Rightarrow D=0$, $D_x\neq 0$, $D_y\neq 0$ το σύστημα είναι **αδύνατο**

ΖΗΤΗΜΑ 4°

Για να λυθεί η ανίσωση θα έχουμε

$$\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{x^2}{2}-x} > \left(\frac{375}{24}\right)^{-\frac{2x}{3}-\frac{5}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{2^2}{5^2}\right)^{\frac{x^2}{2}-x} > \left(\frac{3\cdot125}{3\cdot8}\right)^{-\frac{2x}{3}-\frac{5}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^{\frac{x^2}{2}-x} > \left(\frac{5^3}{2^3}\right)^{-\frac{2x}{3}-\frac{5}{3}} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^{\frac{x^2}{2}-x} > \left[\left(\frac{5}{2}\right)^3\right]^{-\frac{2x}{3}-\frac{5}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^{\frac{x^2}{2}-x} > \left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right]^{-\frac{2x}{3}-\frac{5}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2\left(\frac{x^2}{2}-x\right)} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-3\left(-\frac{2x}{3}-\frac{5}{3}\right)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-2x} > \left(\frac{2}{5}\right)^{2x+5}$ **επειδή η συνάρτηση f(x)=$(\alpha)^x$**

με α=$\frac{2}{5}$ δηλαδή η f(x)=$\left(\frac{2}{5}\right)^x$ είναι φθίνουσα θα έχουμε

$$x^2-2x < 2x+5 \Leftrightarrow x^2-4x-5<0$$

ρίζες του τριωνύμου είναι -1 και 5 οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων

x	$-\infty$ -1	5	$+\infty$
x^2-4x-5	+	$-$	+

άρα $x \in (-1,5)$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΕΡΕΚΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ